

Rekenrups: klassenklus

De reeks begint met het jaartal en bestaat uitsluitend uit positieve getallen. Het volgende getal is steeds het verschil van de twee voorgaande.

De opdracht: zorg dat de reeks zolang mogelijk is.

We stellen de rij voor door a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n
a = 2016

We zoeken naar b zodat we de langste rij kunnen maken

$$c = 2016 - b \Rightarrow b \leq 2016$$

$$\begin{aligned}d = b - c = b - 2016 + b &\Rightarrow d = 2b - 2016 \Rightarrow 2b - 2016 \geq 0 \\2b &\geq 2016 \\b &\geq 1008\end{aligned}$$

Omdat de rij uit 4 getallen zou bestaan moet $1008 \leq b \leq 2016$

$$\begin{aligned}e = c - d = 2016 - b - 2b + 2016 = 4032 - 3b &\Rightarrow 4032 - 3b \geq 0 \\- 3b &\geq - 4032 \\b &\leq 1344\end{aligned}$$

Omdat de rij uit 5 getallen zou bestaan moet $1008 \leq b \leq 1344$

$$\begin{aligned}f = d - e = 2b - 2016 - 4032 + 3b = 5b - 6048 &\Rightarrow 5b - 6048 \geq 0 \\5b &\geq 6048 \\b &\geq 1209,6\end{aligned}$$

Omdat de rij uit 6 getallen zou bestaan moet $1210 \leq b \leq 1344$

$$\begin{aligned}g = e - f = 4032 - 3b - 5b + 6048 = 10080 - 8b &\Rightarrow 10080 - 8b \geq 0 \\- 8b &\geq - 10080 \\b &\leq 1260\end{aligned}$$

Omdat de rij uit 7 getallen zou bestaan moet $1210 \leq b \leq 1260$

$$\begin{aligned}h = f - g = 5b - 6048 - 10080 + 8b = 13b - 16128 &\Rightarrow 13b - 16128 \geq 0 \\13b &\geq 16128 \\b &\geq 1240,61\end{aligned}$$

Omdat de rij uit 8 getallen zou bestaan moet $1241 \leq b \leq 1260$

$$\begin{aligned}i = g - h = 10080 - 8b - 13b + 16128 = 26208 - 21b &\geq 0 \\- 21b &\geq - 26208 \\b &\leq 1248\end{aligned}$$

Omdat de rij uit 9 getallen zou bestaan moet $1241 \leq b \leq 1248$

$$\begin{aligned}j = h - i = 13b - 16128 - 26208 + 21b = 34b - 42336 &\geq 0 \\34b &\geq 42336 \\b &\geq 1245,17\end{aligned}$$

Omdat de rij uit 10 getallen zou bestaan moet $1246 \leq b \leq 1248$

$$k = i - j = 26208 - 21b - 34b + 42336 = 68544 - 55b \geq 0$$

$$-55b \geq -68544$$

$$b \leq 1246,25$$

Omdat de rij uit 11 getallen zou bestaan moet $1246 \leq b \leq 1246 \Rightarrow b = 1246$

We kunnen de rij verder afwerken of verder bepalen:

$$l = j - k = 34b - 42336 - 68544 + 55b = 89b - 110880 \geq 0$$

$$89b \geq 110880$$

$$b \geq 1245,84$$

Omdat de rij uit 12 getallen zou bestaan moet $1246 \leq b \leq 1246 \Rightarrow b = 1246$

$$m = k - l = 68544 - 55b - 89b + 110880 = 179424 - 144b \geq 0$$

$$-144b \geq -179424$$

$$b \leq 1246$$

Omdat de rij uit 13 getallen zou bestaan moet $1246 \leq b \leq 1246 \Rightarrow b = 1246$

$$n = l - m = 89b - 110880 - 179424 + 144b = 233b - 290304 \geq 0$$

$$233b \geq 290304$$

$$b \geq 1245,94$$

Omdat de rij uit 14 getallen zou bestaan moet $1246 \leq b \leq 1246 \Rightarrow b = 1246$

Stel dat er een vijftiende term is dan moet die

$$p = m - n = 179424 - 144b - 233b + 290304 = 469728 - 377b \geq 0$$

$$-377b \geq -469728$$

$$b \leq 1245,96$$

in strijd met voorgaande

We dachten er verder over na en merkten dat Fibonacci de sleutel tot de oplossing is. Stel dat je de rij A, b, c, d, e, f, ... met aanvangswaarde A zo lang mogelijk wil maken.

Dan is :

$$c = A - b = 1A - 1b \text{ en dus moet } b \leq 1A/1 \text{ zijn.}$$

$$d = b - c = 2b - 1A \text{ en dus moet } b \geq 1A/2 \text{ zijn.}$$

$$e = c - d = 2A - 3b \text{ en dus moet } b \leq 2A/3 \text{ zijn.}$$

$$f = d - e = 5b - 3A \text{ en dus moet } b \geq 3A/5 \text{ zijn.}$$

$$g = e - f = 5A - 8b \text{ en dus moet } b \leq 5A/8 \text{ zijn.}$$

$$h = f - g = 13b - 8A \text{ en dus moet } b \geq 8A/13 \text{ zijn.}$$

$$i = g - h = 13A - 21b \text{ en dus moet } b \leq 13A/21 \text{ zijn.}$$

$$j = h - i = 34b - 21A \text{ en dus moet } b \geq 21A/34 \text{ zijn.}$$

$$k = i - j = 34A - 55b \text{ en dus moet } b \leq 34A/55 \text{ zijn. (1)}$$

$$l = j - k = 89b - 55A \text{ en dus moet } b \geq 55A/89 \text{ zijn. (2)}$$

Je hebt al lang door dat de rode getallen de Fibonacci rij vormen.

Voor $A = 2016$ wordt (1) : $b \leq 1246,254545\dots$ en (2) : $b \geq 1245,84$
waaruit het besluit $b = 1246$ volgt.

